基于三共性推导的平面曲线曲率

机械学院 2014 级　　钟铮语

内容摘要　本文受一道确定抛物线的曲率圆思考题的解法启发，探求了一般曲线在任意一点的曲率圆问题。得到的结果与教材上用切线方向关于弧长的变化率定义的曲率公式完全一致。

关键词：微分 密切圆 曲率 导数

1. 引言

课堂上老师给出了如下一道思考题

设圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 与抛物线 $y=x^2+1$ 在点 $P(1,2)$ 相切且在该点有相同的二阶导数。求该圆（称为密切圆）。

题目中虽有三个未知数 a,b,r，但是同时提供了三个独立条件：两条曲线在点 $P(1,2)$ 的函数值、一阶导与二阶导一样。由此不难求得密切圆方程为 $(x+4)^2+(y-\frac{9}{2})^2=\frac{125}{4}$。

将抛物线换做一般的曲线，应当也有类似的密切圆存在，如何计算？能否推导出一个一般的公式呢？以下以参数方程为曲线的一般形式尝试。

2. 三共性曲率圆推导

【问题】设圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 与光滑曲线 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ 在 $t=t_0$ 对应的点 $P(x_0,y_0)$ 处相切且在该点有相同的二阶导数。求该圆（称为密切圆）。

所求的密切圆在点 (x_0,y_0) 满足以下三个条件（即与切线有三共性）：

Ⅰ. 密切圆与曲线有公共点 (x_0,y_0)

Ⅱ. 密切圆在点 (x_0,y_0) 处的导数与曲线在该点导数值相等

Ⅲ. 密切圆在点 (x_0,y_0) 处的二阶导数与曲线在该点的二阶导数值相等

首先求出曲线上的这三个量：

$$\begin{cases} dx=f'(t)dt \\ dy=g'(t)dt \end{cases} \quad ==> \quad \frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

则有：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}=\frac{\frac{g''(t)\cdot f'(t)-f''(t)\cdot g'(t)}{f'^2(t)}\cdot dt}{f'(t)\cdot dt}=\frac{g''(t)\cdot f'(t)-f''(t)\cdot g'(t)}{f'^3(t)}$$

对于密切圆：

$$2(x-a)\cdot dx+2(y-b)\cdot dy=0\quad ==>\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x-a}{y-b}$$则有：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}=-\frac{\frac{(y-b)dx-(x-a)dy}{(y-b)^2}}{dx}=-\frac{1}{y-b}+\frac{x-a}{(y-b)}\cdot\frac{dy}{dx}$$
$$=-\frac{1}{y-b}-\frac{(x-a)^2}{(y-b)^3}$$

根据密切圆与曲线的三共性Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ可知

$$\begin{cases}[f(t_0)-a]^2+[g(t_0)-b]^2=r^2 \cdots\cdots ① \\ \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}=-\frac{f(t_0)-a}{g(t_0)-b} \cdots\cdots ② \\ \frac{g''(t_0)\cdot f'(t_0)-f''(t_0)\cdot g'(t_0)}{f'^3(t_0)}=-\frac{1}{g(t_0)-b}-\frac{[f(t_0)-a]^2}{[g(t_0)-b]^3} \cdots\cdots ③\end{cases}$$

将②代入③得：

$$\frac{g''(t_0)\cdot f'(t_0)-f''(t_0)\cdot g'(t_0)}{f'^3(t_0)}=-\frac{1}{g(t_0)-b}-\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}\cdot\frac{1}{g(t_0)-b}\qquad ==>$$

$$\mathrm{g}(t_0)-\mathrm{b}=-\frac{f'^3(t_0)+f'(t_0)\cdot g'^2(t_0)}{g''(t_0)\cdot f'(t_0)-f''(t_0)\cdot g'(t_0)}\qquad ==>$$

$$\mathrm{b}=\mathrm{g}(t_0)+\frac{f'^3(t_0)+f'(t_0)\cdot g'^2(t_0)}{g''(t_0)\cdot f'(t_0)-f''(t_0)\cdot g'(t_0)} \cdots\cdots ④$$

将④代入②得：

$$f(t_0)-a=[b-g(t_0)]\cdot\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}\qquad ==>$$

$$a=f(t_0)-\frac{f'^2(t_0)\cdot g'^2(t_0)+g'^3(t_0)}{g''(t_0)\cdot f'(t_0)-g'(t_0)\cdot f''(t_0)} \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

将④⑤代入①得：

$$r^2=\left[\frac{f'^3(t_0)+f'(t_0)\cdot g'^2(t_0)}{g''(t_0)\cdot f'(t_0)-g'(t_0)\cdot f''(t_0)}\right]^2+\left[\frac{f'^2(t_0)\cdot g'(t_0)+g'^3(t_0)}{g''(t_0)\cdot f'(t_0)-g'(t_0)\cdot f''(t_0)}\right]^2$$

$$\Longrightarrow \qquad r^2=\frac{[f'^2(t_0)+g'^2(t_0)]^3}{[g''(t_0)f'(t_0)-g'(t_0)f''(t_0)]^2}$$

$$\Longrightarrow \qquad r=\frac{[f'^2(t_0)+g'^2(t_0)]^{\frac{3}{2}}}{|g''(t_0)f'(t_0)-g'(t_0)f''(t_0)|}$$

综上知，当$t=t_0$时：

$$\begin{cases} a=f(t_0)-\dfrac{f'^2(t_0)\cdot g'^2(t_0)+g'^3(t_0)}{g''(t_0)\cdot f'(t_0)-g'(t_0)\cdot f''(t_0)} \\ b=g(t_0)+\dfrac{f'^3(t_0)+f'(t_0)\cdot g'^2(t_0)}{g''(t_0)\cdot f'(t_0)-f''(t_0)\cdot g'(t_0)} \\ r=\dfrac{[f'^2(t_0)+g'^2(t_0)]^{\frac{3}{2}}}{|g''(t_0)f'(t_0)-g'(t_0)f''(t_0)|} \end{cases}$$

于是所求密切圆的标准方程为：

$$[x-f(t_0)+\frac{f'^2(t_0)\cdot g'^2(t_0)+g'^3(t_0)}{g''(t_0)\cdot f'(t_0)-g'(t_0)\cdot f''(t_0)}]^2+$$

$$[y-g(t_0)-\frac{f'^3(t_0)+f'(t_0)\cdot g'^2(t_0)}{g''(t_0)\cdot f'(t_0)-f''(t_0)\cdot g'(t_0)}]^2=\frac{[f'^2(t_0)+g'^2(t_0)]^3}{[g''(t_0)f'(t_0)-g'(t_0)f''(t_0)]^2}$$

曲线的曲率就是上述半径的倒数

$$K=\frac{1}{r}=\frac{|g''(t_0)f'(t_0)-g'(t_0)f''(t_0)|}{[f'^2(t_0)+g'^2(t_0)]^{\frac{3}{2}}}$$

教材上没有用参数方程表示的曲率，需要大段的手工推导，得到的结果完全一致。

其中密切圆曲率半径计算有点复杂，具体过程如下：

$$r^2=\left[\frac{f'^3(t_0)+f'(t_0)\cdot g'^2(t_0)}{g''(t_0)\cdot f'(t_0)-g'(t_0)\cdot f''(t_0)}\right]^2+\left[\frac{f'^2(t_0)\cdot g'(t_0)+g'^3(t_0)}{g''(t_0)\cdot f'(t_0)-g'(t_0)\cdot f''(t_0)}\right]^2$$

$$\Longrightarrow \quad r^2=$$

$$\frac{f'^4(t_0)g'^2(t_0) + 2f'^2(t_0)g'^4(t_0) + g'^6(t_0) + f'^6(t_0) + 2f'^4(t_0)g'^2(t_0) + f'^2(t_0)g'^4(t_0)}{[g''(t_0) \cdot f'(t_0) - g'(t_0) \cdot f''(t_0)]^2}$$

$$= \frac{[f'^2(t_0) + g'^2(t_0)]^3}{[g''(t_0)f'(t_0) - g'(t_0)f''(t_0)]^2}$$