2012-2 期中考试 A 参考答案

1、解：因为 $\overrightarrow{OA}=\{1,2,3\}$，$\overrightarrow{OB}=\{3,2,1\}$，$\overrightarrow{OC}=\{1,4,5\}$，[2 分]

所以体积 $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}\left|[\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC}]\right|$ [5 分] $=\dfrac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1&2&3\\3&2&1\\1&4&5\end{matrix}\right\|=\dfrac{4}{3}$。[8 分]

2、解一：由点 A 向平面作垂线 $L:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$，[2 分]

参数方程为：$x=t+4$，$y=2t-3$，$z=-t+1$，[4 分]

代入到平面 π 的方程得 $t=1$，[6 分]

所以 L 和 π 的交点是 $(5,-1,0)$，故投影点是 $(5,-1,0)$。-------------------[8 分]

（如果直接解三元线性方程组，类似给分。）

解二：设点 $P(x,y,z)$ 是平面上任意一点。则 $|AP|=\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2+(z-1)^2}$ [2 分]

设拉格朗日函数 $F(x,y,z)=(x-4)^2+(y+3)^2+(z-1)^2+\lambda(x+2y-z-3)$ [3 分]

令 $\quad F_x=2(x-4)+\lambda=0 \qquad F_y=2(y+3)+2\lambda=0$

$\quad F_z=2(z-1)-\lambda=0 \qquad x+2y-z-3=0$ ---------------------- [6 分]

联立方程解得唯一驻点 $M(5,-1,0)$，由题意，点 A 到平面有且仅有最小值，所以 $M(5,-1,0)$ 为点 $A(4,-3,1)$ 在平面上的投影。-------------------[8 分]

3、解一：两边同时微分：$e^z dz+z(xdy+ydx)+xydz=0$ [4 分]

由此解出 $\mathrm{dz}=\dfrac{-\mathrm{zydx}-\mathrm{xzdy}}{\mathrm{xy}+\mathrm{e}^{\mathrm{z}}}$ [6 分]，$\mathrm{z_x}=\dfrac{-\mathrm{zy}}{\mathrm{xy}+\mathrm{e}^{\mathrm{z}}}$，$\mathrm{z_y}=\dfrac{-\mathrm{xz}}{\mathrm{xy}+\mathrm{e}^{\mathrm{z}}}$ [8 分]

解二：两边同时对 x 求导，$\mathrm{e^z z_x}+\mathrm{xyz_x}+yz=0$，得 $\mathrm{z_x}=\dfrac{-\mathrm{zy}}{\mathrm{xy}+\mathrm{e}^{\mathrm{z}}}$；[3 分]

同理 $\mathrm{z_y}=\dfrac{-\mathrm{xz}}{\mathrm{xy}+\mathrm{e}^{\mathrm{z}}}$ [6 分]；故 $\mathrm{dz}=\dfrac{-\mathrm{zydx}-\mathrm{xzdy}}{\mathrm{xy}+\mathrm{e}^{\mathrm{z}}}$。-------------------------[8 分]

4、解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1(g(x)-y,x+h(y))\cdot g'(x)+f_2(g(x)-y,x+h(y))$ [4 分]

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(f_1)\cdot g'(x)+\dfrac{\partial}{\partial y}(f_2)$ [5 分] $=[-f_{11}+f_{12}\cdot h'(y)]g'(x)+[-f_{21}+f_{22}\cdot h'(y)]$

$= -f_{11}g' + f_{12}g'h' - f_{21} + f_{22}h'$。---------------------[8 分]

5、解一: 3 个方程两边对 x 求导，得

$$\frac{du}{dx} = f_x + f_y\frac{dy}{dx} \qquad (1)$$

$$g_x + g_y\frac{dy}{dx} + g_z\frac{dz}{dx} = 0 \qquad (2)$$

$$h_x + h_z\frac{dz}{dx} = 0 \qquad (3)\ [6\text{分}]$$

由（3）解得 $\frac{dz}{dx} = -\frac{h_x}{h_z}$。代入（2）中解得 $\frac{dy}{dx} = \frac{g_z h_x - g_x h_z}{g_y h_z}$。

代入（1）中得 $\frac{du}{dx} = f_x + f_y\frac{g_z h_x - g_x h_z}{g_y h_z}$。[8 分]

解二:3 个方程两边微分，得

$$du = f_x dx + f_y dy \qquad (1)$$

$$g_x dx + g_y dy + g_z dz = 0 \qquad (2)$$

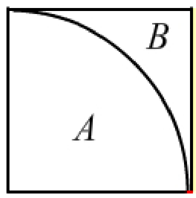
$$h_x dx + h_z dz = 0 \qquad (3)\ [6\text{分}]$$

由方程（2)、(3）消去 dz，得 $dy = \frac{g_z h_x - g_x h_z}{g_y h_z}dx$

代入（1)，两边同除以 dx，得 $\frac{du}{dx} = f_x + f_y\frac{g_z h_x - g_x h_z}{g_y h_z}$。-----------------[8 分]

6、解：先交换积分次序，再计算。$I = \int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx = -\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi y}{2}dy$ [交换积分次序 4 分，第一次积分 6 分]

$$= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{\pi}y\sin\frac{\pi y}{2} + \frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi y}{2}\right]_1^2 = \frac{4}{\pi^3}(2+\pi)$$ -------------------[8 分]



7、记 $f = x^2 + y^2 - 1$ ，

$I = -\iint\limits_A fdxdy + \iint\limits_B fdxdy = -\iint\limits_A fdxdy + \iint\limits_D fdxdy - \iint\limits_A fdxdy$ [4

分] $=\iint\limits_D fdxdy-2\iint\limits_A fdxdy=2\iint\limits_D x^2dxdy-|D|-2\iint\limits_A (x^2+y^2)dxdy+2|A|$ [6 分]

$=2\int_0^1 x^2dx\int_0^1 dy-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^3dr-1+\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}-\frac{\pi}{4}-1+\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}$ [8 分]

8、解：$I=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz+2\iiint\limits_\Omega (xy+yz+zx)dxdydz$（奇偶对称性）[2 分]

$=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz=2\iiint\limits_{\Omega_1}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$（$\Omega_1$为$\Omega$的上半区域）[5 分]

$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_0^1 (r^2+z^2)rdz$（柱面坐标）[7 分] $=4\pi\int_0^1 (r^3+\frac{1}{3}r)dr=\frac{5}{3}\pi$。[8 分]

9、证：由积分区域的轮称性，有

$\iiint\limits_\Omega \frac{f(x)}{f(x)+f(y)+f(z)}dv=\iiint\limits_\Omega \frac{f(y)}{f(x)+f(y)+f(z)}dv=\iiint\limits_\Omega \frac{f(z)}{f(x)+f(y)+f(z)}dv$ [2 分]

于是，

$I=(a+b+c)\iiint\limits_\Omega \frac{f(x)}{f(x)+f(y)+f(z)}dv=\frac{(a+b+c)}{3}\iiint\limits_\Omega \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{f(x)+f(y)+f(z)}dv$ [6 分]

$=\frac{1}{3}(a+b+c)\iiint\limits_\Omega dv=\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{4\pi R^3}{3}$。[8 分]

10、证明：设$G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda F(x,y,z)$

$G_x=2x+\lambda F_x(x,y,z)=0$

$G_y=2y+\lambda F_y(x,y,z)=0$

$G_z=2z+\lambda F_z(x,y,z)=0$ [2 分]

设 $P(x_0,y_0,z_0)$ 满足方程组，于是，方程组的解为：$x_0=-\frac{\lambda}{2}F_x(x_0,y_0,z_0)$，$y_0=-\frac{\lambda}{2}F_y(x_0,y_0,z_0)$，$z_0=-\frac{\lambda}{2}F_z(x_0,y_0,z_0)$ 且$F(x_0,y_0,z_0)=0$。[4 分]

曲面在点$P(x_0,y_0,z_0)$处的法向量为$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$

法线方程：$\frac{x+\frac{\lambda}{2}F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y+\frac{\lambda}{2}F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z+\frac{\lambda}{2}F_z(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$ [6 分]

将原点坐标 $x=y=z=0$，代入法线方程，满足。表明法线过原点。[8 分]

11、解：两球面的交线为 $a^2-z^2=R^2-(z-a)^2$，$x^2+y^2=R^2-(z-a)^2$，即

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2-\dfrac{R^4}{4a^2} \\ z=a-\dfrac{R^2}{2a} \end{cases} \qquad [2 分]$$

Σ 在定球内部那部分在 xOy 坐标面上的投影区域为

$$D:\begin{cases} x^2+y^2\le R^2-\dfrac{R^4}{4a^2} \\ z=0 \end{cases}$$，其中 $0<R<2a$，并将圆域半径记为 R^*。[3 分]

这部分球面的方程是 $z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$(x,y)\in D$。

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad z_y=\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \qquad [4 分]$$

所求面积

$$S(R)=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{R^*}\frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}}rdr$$

$$=-2\pi R\cdot\sqrt{R^2-r^2}\Big|_0^{R^*}=2\pi R^2-\frac{\pi}{a}R^3 \qquad [6 分]$$

令 $S'(R)=4\pi R-\dfrac{3\pi}{a}R^2=0$，得 $R=\dfrac{4}{3}a$。因 $S(0)=S(2R)=0$，所以 $R=\dfrac{4}{3}a$ 时，$S(R)$ 取最大值。即 $R=\dfrac{4}{3}a$ 时，Σ 在定球内部那部分面积最大。[8 分]

12、解：（1）因为 $0<\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

（夹挤法则），所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续；[2 分]

（2）因为 $f(x,0)=f(0,y)=0$，所以 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$。（用定义计算亦可）；[4 分]

（3） 记 $\Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$。因

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\Delta f-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{(\Delta x)^2}{2(\Delta x)^2}\neq 0,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微。[8 分]

（4）由于不具有可微性，故公式 $\frac{\partial f}{\partial n}=\nabla f\bullet n$ 不可用。只能使用定义讨论和计算[若用此公式求出方向导数等于 0，就扣掉 4 分]

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{n}}=\lim_{\mathrm{t}\to 0^+}\frac{f(\mathrm{t}\cos\alpha,\mathrm{t}\sin\alpha)-f(0,0)}{\mathrm{t}}=\lim_{\mathrm{t}\to 0^+}\frac{\mathrm{t}\cos\alpha\times\mathrm{t}\sin\alpha}{\mathrm{t}^2}=\cos\alpha\sin\alpha。$$

或者 $\frac{\partial f}{\partial n}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta x}{\rho}\cdot\frac{\Delta y}{\rho}=\cos\alpha\sin\alpha$ [12 分]