# 2008 级第二学期试题

**一、填空题**（每小题 3 分，六个小题共 18 分）

**1**.设函数 $z=x^{\ln y}$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$______________________.

**2**.椭圆抛物面 $y=x^2+z^2$ 在点 $(1,2,1)$ 处的切平面方程为________.

**3**.交换二次积分的积分次序 $\int_{-1}^{0}dy\int_{1-y}^{2}f(x,y)\,dx=$____________________.

**4**.幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域为 ______________________.

**5**.设 $f(x)=\begin{cases}x^2,-\pi\le x<0,\\ \pi^2,0\le x<\pi,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的以 $2\pi$ 为周期的 Fourier 级数的和函数 $S(x)$ 在 $x=\pi$ 处的值为 ______________________.

**6**.设 $u=x^2yz$, 则 $div$ （$\boldsymbol{grad}\ u)\big|_{(1,2,1)}=$ ____________________

**二、单项选择题**（每小题 3 分，四个小题共 12 分）

**7**.以曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\ x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 为准线，母线平行于 $x$ 轴的柱面方程是（　　）.

A. $x^2+2y^2=16$　　B. $3y^2-z^2=16$　　C. $3x^2+2z^2=16$　　D. $3y^2+z^2=16$

**8**. 函数 $f(x,y)=|x|+y\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）.

A.连续且对 $x$ 的偏导数存在　　B.对 $y$ 的偏导数不存在

C.连续且对 $y$ 的偏导数存在　　D.可微

**9**.　$z_x(x_0,y_0)=0$ 和 $z_y(x_0,y_0)=0$ 是函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处取得极值的（　　）。

A　充要条件　　B　既非充分也非必要条件

C　充分但非必要条件　　D　必要但非充分条件

**10**.　设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^{n-1}$ 在 $x=3$ 处（　　）.

A.发散　　B.条件收敛　　C.绝对收敛　　D.收敛性不确定

**三、**（每小题 6 分，三个小题共 18 分）

**11**. 设 $z=f(x,\dfrac{x}{y})+\dfrac{1}{y}g(xy)$，其中 $f$ 具有连续的二阶偏导数，$g$ 二阶可导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

**12**. 设函数$u=e^z$，其中$z=z(x,y)$由方程$y=z+x^2z^3$所确定，求$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial u}{\partial y}$.

**13.** 求函数$u=x^{yz}$在点$M_0(2,1,1)$处沿梯度$\mathbf{grad}\ u\big|_{M_0}$方向的方向导数.

**四、**（每小题 6 分，三个小题 共 18 分）

**14**. 求$I=\iint\limits_D(y+xy^2)dxdy$，区域$D$由两条抛物线$y=x^2$和$y=4x^2$以及直线$y=1$所围成.

**15**. 求$I=\iint\limits_S(x+y+z)dS$，$S$为平面$y+z=5$被柱面$x^2+y^2=25$截得的部分.

**16**. 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}(a>0)$的敛散性.

**五、**（本大题共三小题，每小题均有 A、B 题。A、B 两题任选一题，否则按 A 题评分。A 题满分为 8 分， B 题满分为 4 分。请将所选题题首的圆圈涂黑，表示你的选择。）

○**17A**. 求$I=\int_L(-2x^3y)dx+x^2y^2dy$，其中$L$是从点$O(0,0)$沿曲线$x=\sqrt{2y-y^2}$至点$A(0,2)$的曲线段.

○**17B.** 求$I=\oint_L(x+y)dx-(x-y)dy$，其中$L$是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的正向.

○**18A.** 求 $I=\oiint\limits_S x(y-z)dydz+(x-y)dxdy$，其中$S$为柱面$x^2+y^2=1$及平面$z=0$和$z=1$所围成立体表面的外侧.

○**18B.** 设$V$是由上半球面$x^2+y^2+z^2=R^2$与锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的区域（$R>0$），求$I=\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)dv$.

○**19A**. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$的和函数.

○**19B.** 将函数$f(x)=\frac{1}{3+x}$在$x_0=1$处展开为幂级数.

**六、证明题**（每小题 5 分，两个小题共 10 分）

**20.** 设函数$f(x)$在$x=0$的某邻域$N(0,r)$内具有二阶连续导数，且$f(0)=f'(0)=0$，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$绝对收敛.

**21.**设函数$Q(x,y)$在$xOy$平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分$\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$在全平面与路径无关，且对任意$t$恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy$$

求$Q(x,y)$.

## 2008 级第二学期试题解答

1． $x^{\ln y}\cdot\frac{1}{xy}(1+\ln x\cdot\ln y)$，2． $2x-y+2z-2=0$，3. $\int_1^2 dx\int_{1-x}^0 f(x,y)dy$，4. $[3,5)$， 5. $\pi^2$， 6. 4.

7．B； 8．C； 9．B； 10．C 11． $\frac{\partial f}{\partial x}=f_1'+\frac{1}{y}f_2'+g'$ ； $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_{12}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''+xg''$

12．令 $F=z+x^2z^3-y$，因为 $F_x=2xz^3, F_y=-1, F_z=1+3x^2z^2$，所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2xz^3}{1+3x^2z^2}$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{1}{1+3x^2z^2}$ ，故 $\frac{\partial u}{\partial x}=e^z\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2xz^3e^z}{1+3x^2z^2}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=e^z\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^z}{1+3x^2z^2}$

13． $gradu\big|_{(2,1,1)}=\left\{yzx^{yz-1}, zx^{yz}\ln x, yx^{yz}\ln x\right\}\big|_{(2,1,1)}=\{1, 2\ln 2, 2\ln 2\}$；

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{(2,1,1)}=\left|gradu\big|_{(2,1,1)}\right| =\sqrt{1+8(\ln 2)^2}$$

14．因为积分区域关于 $y$ 轴对称，故 $\iint_D xy^2dxdy=0$ 。

$$I=\iint_D ydxdy=2\int_0^1 ydy\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}}dx=2\int_0^1 y\left(\sqrt{y}-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)dy=\frac{2}{5}$$

15．因为 $S:z=5-y$，所以 $dS=\sqrt{1+(-1)^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$

于是 $I=\iint_{D_{xy}}(x+y++5-y)\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^5(5+r\cos\theta)rdr=125\sqrt{2}\pi$.

16．当 $a=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ 发散；当 $a<1$ 时，$\frac{a^n}{1+a^n}<a^n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}a^n$ 收敛，则由比较定理，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}$ 收敛；当 $a>1$ 时，通项 $\frac{a^n}{1+a^n}\to 1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}$ 发散.

17A．方法一：作辅助线 $L_1: x=0, 0\le y\le 2$，则 $L$ 与 $L_1$ 围成闭区域 $D$。由于 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2xy^2+2x^3$，由 Green 公式，有

$$I=\int_{L+L_1}-\int_{L_1} =\iint_D 2x(x^2+y^2)dxdy-\int_{L_1}$$ 。

由于 $-\int_{L_1}(-2x^3y)dx+x^2y^2dy=0$，

故 $I=\iint_D 2x(x^2+y^2)dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^4\cos\theta dr =\frac{64}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^5\theta d\theta=\frac{32}{15}$

方法二：直接化作定积分。因为$L: x=\sqrt{2y-y^2}, 0\le y\le 2$，则$I=\int_L(-2x^3y)dx+x^2y^2dy$

$$=\int_0^2[-2y(2y-y^2)^{\frac{3}{2}}\frac{1-y}{\sqrt{2y-y^2}}+y^2(2y-y^2)]dy \quad =\int_0^2(8y^3-3y^4-4y^2)dy=\frac{32}{15}$$

17B． 方法一：使用格林公式。$I=\iint\limits_D -2dxdy=-2\pi ab$；

方法二：代入参数方程 $x=a\cos t, y=b\sin t$ 化作定积分，则

$$I=\int_0^{2\pi}[(b^2-a^2)\cos t\sin t)-ab]dt=-2\pi ab$$ 。

18 A． 由 Gauss 公式, 有

$$I=\iiint\limits_V(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz \quad =\iiint\limits_V(y-z)dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^1(r\sin\theta-z)dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r(r\sin\theta-\frac{1}{2})dr \quad =\int_0^{2\pi}(\frac{1}{3}\sin\theta-\frac{1}{4})d\theta=-\frac{\pi}{2}$$

18B．因为 $V: 0\le\rho\le R, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}, 0\le\theta\le 2\pi$ ，所以

$$I=\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^R\rho^4\sin\varphi d\rho \quad =2\pi\cdot\frac{R^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi=\frac{1}{5}(2-\sqrt{2})\pi R^5$$ 。

19A. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}|x|^{2n}\cdot\frac{2^n}{2n-1}\cdot\frac{1}{|x|^{2n-2}}=\frac{|x|^2}{2}$

当$\frac{|x|^2}{2}<1$时, 即$|x|<\sqrt{2}$时，级数收敛, 又$x=\pm\sqrt{2}$时, 原级数发散, 故收敛域为（$-\sqrt{2},\sqrt{2}$）。

设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$，则当$|x|<\sqrt{2}$且$x\ne 0$时，

$$S(x)=[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}]'=[\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^2}{2})^n]'=[\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}]'=[\frac{x}{2-x^2}]'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$$

当$x=0$时，$S(x)=\frac{1}{2}$；所以$S(x)=\begin{cases}1/2 & x=0\\ \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2} & x\ne 0\end{cases}$

$$19B. f(x)=\frac{1}{4+(x-1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}} \quad =\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-1}{4})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{4^{n+1}}(x-1)^n \quad (-3<x<5)$$

**20.** 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶 Taylor 公式为：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(\xi)x^2=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\text{，}\xi\text{ 介于 }0\text{ 与 }x\text{ 之间}$$

又由 $f''(x)$ 的连续性知，$\exists M>0$，使得 $\left|f''(x)\right|\le M$，于是 $\left|f(x)\right|\le\frac{1}{2}\left|f''(\xi)\right|x^2\le\frac{M}{2}x^2$， 令 $x=\frac{1}{n}$，得 $\left|f(\frac{1}{n})\right|\le\frac{M}{2}\frac{1}{n^2}$。因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛。

**21**．由于曲线积分 $\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$ 与路径无关, 则有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=2x$， 即

$Q(x,y)=x^2+\varphi(y)$ ，

又
$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(t,0)}2xydx+Q(x,y)dy+\int_{(t,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_0^1(t^2+\varphi(y))dy=t^2+\int_0^1\varphi(y)dy$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,0)}2xydx+Q(x,y)dy+\int_{(1,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_0^t(1+\varphi(y))dy=t+\int_0^t\varphi(y)dy$$

则
$$t^2+\int_0^1\varphi(y)dy=t+\int_0^t\varphi(y)dy$$

两边对 $t$ 求导得 $2t=1+\varphi(t)$，$\varphi(t)=2t-1$，从而 $\varphi(y)=2y-1,Q(x,y)=x^2+2y-1$。